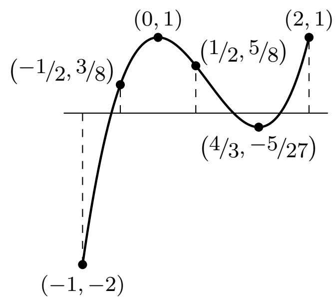
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
Abr-Jul 2024
1^er^ Examen Parcial (25 %)

Solución

Pregunta 1. (4 ptos.) Dada la función $f(x) = (x-2)x^2 + 1$ y la partición $\mathcal{P} = \{-1,\ {}^{-1}\!/_2,\ {}^{1}\!/_2,\ 2\}$ del intervalo $[-1, 2]$, calcule:

- La suma inferior $L(f, \mathcal{P})$
- La suma superior $U(f, \mathcal{P})$



Solución: Como $f'(x) = x(3x-4)$, se tiene que:

- f es creciente en $[-1,\ 0]$ y en $[{}^4\!/_3,\ 2]$
- f es decreciente en $[0,\ {}^4\!/_3]$

Si denotamos a la partición $\mathcal{P}$ por $\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\}$ y al valor mínimo y valor máximo de la función f sobre el subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$ por m_i y M_i respectivamente, entonces

$$\{m_i\}_{i=1}^{3} = \{-2,\ {}^3\!/_8,\ {}^{-5}\!/_{27}\} \qquad \text{y} \qquad \{M_i\}_{i=1}^{3} = \{{}^3\!/_8,\ 1,\ 1\}$$

pues los valores extremos de la función, en cada subintervalo, se ilustran en el gráfico anterior. Luego,

$$L(f, \mathcal{P}) = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)(1) + \left(-\frac{5}{27}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = {}^{-65}\!/_{72}$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(1) + (1)\left(\frac{3}{2}\right) = {}^{43}\!/_{16}$$

ya que las longitudes de los subintervalos son ${}^1\!/_2$, 1 y ${}^3\!/_2$, respectivamente.

Pregunta 2. (7 ptos.) Determine una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ y puntos muestra tales que la suma de Riemann correspondiente esté dada por

$$\mathcal{S}(n) = \frac{7}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(1+\frac{7i}{n}\right)^5}{3(2^9-1)} + \frac{5}{6}\left(1+\frac{7i}{n}\right)^{2/3} + \frac{16}{\left(1+\frac{7i}{n}\right)^2}\right)$$

Luego, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{S}(n)$ haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución: Si consideramos la función $f : [1, 8] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^5}{3(2^9-1)} + \frac{5}{6}x^{2/3} + \frac{16}{x^2}$$

una partición uniforme del intervalo $[1, 8]$ y los puntos muestra como el extremo derecho en cada subintervalo, la suma de Riemann correspondiente coincide con $\mathcal{S}(n)$ pues, en tal caso,

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + \frac{7i}{n} && \text{con } i = 0, 1, \ldots, n \\ \Delta x_i &= \frac{7}{n} && \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \\ \xi_i &= x_i = 1 + \frac{7i}{n} && \text{para } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{7i}{n}\right)\frac{7}{n} = \frac{7}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{7i}{n}\right) = \mathcal{S}(n)$$

Como la norma de la partición vale $|\mathcal{P}| = {}^7\!/_n$, ella tiende a cero si, y sólo si, n tiende a infinito. Luego, dado que la función f es integrable sobre el intervalo $[1, 8]$ (pues es continua en todo ese intervalo), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{7i}{n}\right)\frac{7}{n} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^8 \left(\frac{x^5}{3(2^9-1)} + \frac{5}{6} x^{2/3} + \frac{16}{x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3(2^9-1)} \int_1^8 x^5 \,\mathrm{d}x \,+\, \frac{5}{6}\int_1^8 x^{2/3}\,\mathrm{d}x \,+\, 16\int_1^8 x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3(2^9-1)} \left(\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_1^8 \,+\, \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Bigg|_1^8 \,+\, 16\Big(-x^{-1}\Big)\Bigg|_1^8$$

$$= \frac{2^{18}-1}{(2)(3^2)(2^9-1)} \,+\, \frac{1}{2}(2^5-1) \,+\, 16\left(-\frac{1}{8}+1\right)$$

$$= \frac{(2^9-1)(2^9+1)}{(2)(3^2)(2^9-1)} + \frac{31}{2} + 14$$

$$= \frac{513}{(2)(3^2)} + \frac{31}{2} + 14$$

$$= \frac{(3^2)(57)}{(2)(3^2)} + \frac{31}{2} + 14$$

$$= \frac{57}{2} + \frac{31}{2} + 14$$

$$= 58$$

Pregunta 3. (4 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(2x+3\sqrt{x}\right)^4}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$x = u^2$$
$$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{x^2}{\left(2x+3\sqrt{x}\right)^4}\,\mathrm{d}x \overset{\downarrow}{=} \int \frac{u^4}{\left(2u^2+3u\right)^4}\,2u\,\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{u^4\,(2u)}{\left(u\,(2u+3)\right)^4}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{2u}{\left(2u+3\right)^4}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int \left(\frac{2u+3}{\left(2u+3\right)^4} - \frac{3}{\left(2u+3\right)^4} \right) \mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{1}{\left(2u+3\right)^3}\,\mathrm{d}u - \int \frac{3}{\left(2u+3\right)^4}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{\left(2u+3\right)^3}\,\mathrm{d}u - \frac{3}{2}\int \frac{2}{\left(2u+3\right)^4}\,\mathrm{d}u$$

$$w = 2u+3$$
$$\mathrm{d}w = 2\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\int w^{-3}\,\mathrm{d}w - \frac{3}{2}\int w^{-4}\,\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)w^{-2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)w^{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-2} + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-3} + C$$

Pregunta 4. (4 ptos.) Dada la función $G(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, halle $G'(1)$.

Solución: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}\,(x)' - \frac{\left(-x^2\right)^2}{1+\left(-x^2\right)^2}\,\left(-x^2\right)'$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^4}{1+x^4}\,(-2x)$$

Luego, evaluando en $x=1$ se obtiene que $G'(1) = 3/2$.

Pregunta 5. Dada la función $f(x) = x^2 \arccos(x)$

- (4 ptos.) Halle $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- (2 ptos.) Calcule el promedio de la función f sobre todo su dominio.

Solución: Integrando por partes, se tiene que

$$
\begin{aligned}
& \quad f'(x) = x^2 \qquad\qquad f(x) = x^3/3 \\
& \quad g(x) = \arccos(x) \quad g'(x) = -1/\sqrt{1-x^2} \\
\int x^2 \arccos(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,(-x)\,\mathrm{d}x \\
& \quad u^2 = 1-x^2 \\
& \quad u\,\mathrm{d}u = -x\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\int \frac{1-u^2}{u}\,(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\int \left(1-u^2\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\,u + \frac{1}{9}\,u^3 + C \\
&= \frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{3/2} + C
\end{aligned}
$$

Luego, como el dominio de la función f es el intervalo $[-1,1]$ (el cual mide 2), el promedio de la función f sobre ese intervalo viene dado por

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,x^3 \arccos(x) - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{3/2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{6}\Big((1)\underbrace{\arccos(1)}_{=0} - (-1)^3\underbrace{\arccos(-1)}_{=\pi}\Big) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$